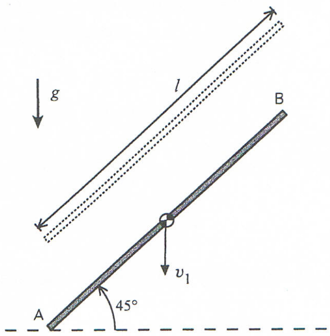
Tentamen
Mechanica & Relativiteit 2
14 april 2011, 9:00–12:00u

Opgave 1 Inleidende vraag:

a. Een massapunt botst met een snelheid v loodrecht tegen een starre wand. Wat is de snelheid na de botsing (grootte en richting) als deze elastisch is?

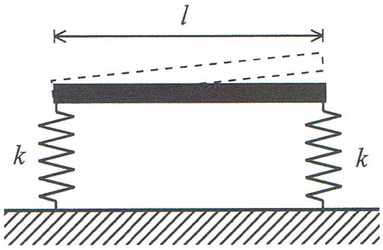
Beschouw nu een staaf van lengte l met massa m die onder een hoek van 45° in verticale richting naar beneden valt. Op het moment dat het uiteinde de grond raakt heeft het massamiddelpunt (aangegeven met ⊕) een snelheid v_1 (zie figuur). Aangenomen mag worden dat de botsing van de staaf met de grond zuiver elastisch is en dat het uiteinde wrijvingsloos over het horizontale vlak kan glijden.



b. Welke behoudswet(ten) is(zijn) van toepassing op dit probleem? Geef daarbij ook aan ten opzichte waarvan deze geld(t)(en).

c. Bepaal de beweging direct na de botsing op de grond.

Opgave 2 Een balk van lengte l ligt op twee identieke veren met veerconstante k. Omdat de massa m homogeen verdeeld is, zijn de veren in de evenwichtsstand even ver uitgerekt. De balk kan trillingen uitvoeren rond deze evenwichtsstand.



a. Hoeveel graden van vrijheid heeft de balk? Welke?

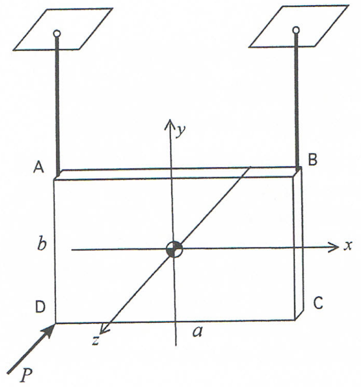
b. Stel de Lagrangiaan op voor kleine uitwijkingen (waarbij horizontale verplaatsingen dus mogen worden verwaarloosd)

c. Bereken de eigenfrequentie(s) en bijbehorende trillingsvorm(en). Geef de trillingsvorm(en) aan in een duidelijke schets.

$v_1 = \frac{1}{12} l \omega$
$\Rightarrow \omega = \frac{12 v_1}{l}$

$\frac{l^4}{v^2} = \frac{L^4}{\frac{L^2}{T^2}} =$

Opgave 3 Een rechthoekige plaat met massa m, breedte a en hoogte b, hangt met twee touwen aan de hoekpunten A en B. Als de plaat stilhangt, met de zijde AB in horizontale richting, wordt in hoekpunt D een stoot ter grootte P uitgeoefend loodrecht op de plaat. De vraag heeft betrekking op de beweging van de plaat direct na de stoot.



a. Bereken de traagheidsmomenten van de plaat om de aangegeven x, y en z assen.

b. Bereken direct na de stoot de snelheid van het massamiddelpunt

en

c. de hoeksnelheid van de plaat.

Opgave 4 Geef bij ieder van de onderstaande beweringen aan of deze juist of onjuist is, en verklaar waarom.

a. Ieder object heeft een traagheidstensor, maar de traagheidstensor heeft alleen hoofdrichtingen indien het lichaam drie symmetrie-vlakken heeft.

b. De methode van Lagrange is equivalent aan Newton's $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$; echter, de behoudswetten voor impuls, impulsmoment en energie moeten expliciet worden toegevoegd.

c. De Euler-Lagrange vergelijkingen $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}$ gelden niet wanneer er wrijving is.

Beoordeling:

Opgave	aantal punten
1	5
2	5
3	6
4	3

Tentamencijfer = (totaal punten + 2) /2

$L = I \cdot w = mR^2 \cdot v = mL^2 \cdot \frac{4\pi}{T} = \frac{mL^{2}}{t}$

3 $\frac{1}{2}$

1

a Dan is de snelheid van de bal $-v$ ~~en de snelheid~~, oftewel, even snel maar in tegenovergestelde richting.

|

b Elastische botsing, dus behoud van energie, ~~behoud~~ in de vorm van kinetische energie, want direct voor en na de botsing is er geen bron waar veel potentiële energie in kan. De aarde krijgt er niet veel snelheid bij, dus er is behoud van E in het systeem van de balk.

behoud van impuls, t.o.v. het heelal, daarmee bedoel ik dat de aarde ook in het systeem zit

behoud van impulsmoment in het systeem van de balk mits ~~de stoot die wordt uitgedeeld door de aarde op het eerste moment van botsing als stoot en dus als verandering van impulsmoment wordt meegenomen~~

het punt waar de balk de aarde eerst raakt als oorsprong wordt genomen zodat de stoot die de aarde daar levert geen arm en dus geen bijdrage heeft

|

c

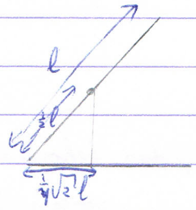
~~c behoud van energie~~

c behoud van energie: $E_{voor} = E_{na}$, neem $h=0$ op de hoogte van het middelpunt van de staaf, dan is er geen potentiële energie:

$\frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m v_2^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$ met v_2 de snelheid van het cm na de botsing, en I het traagheidsmoment om het cm en ω de hoeksnelheid om het cm

$$m v_1^2 = m v_2^2 + \left(\frac{1}{12} m \ell^2\right)\omega^2$$

$$v_1^2 = v_2^2 + \frac{1}{12}\ell^2\omega^2$$



behoud van impulsmoment:

(om het punt op de grond recht onder het cm):

$$L_{voor} = L_{na}$$

$$0 = \frac{1}{12} m \ell^2 \cdot \omega + \underbrace{\frac{1}{4}\sqrt{2}\cdot \ell \cdot \Delta p}_{\text{ten gevolge van de stoot}}$$

ten gevolge van de stoot: $R \perp \Delta p$, dus $|\Delta L| = R \cdot |\Delta p|$

$$0 = \frac{1}{12} m \ell \cdot \omega + \frac{1}{4}\sqrt{2}\cdot 2 \cdot v_1 \cdot m$$

zie vraag a

$1\frac{1}{2}$

$$0 = \frac{1}{12}\ell\omega + \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot v_1$$

$$\frac{1}{12}\ell\omega = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot v_1$$

$\omega = -\frac{\sqrt{2}\cdot v_1}{\ell}\cdot\sqrt{6}$, dat is met de klok mee

De 2 vergelijkingen samenvoegen: $v_1^2 = v_2^2 + \frac{1}{12}\ell^2\left(\sqrt{6}\,\frac{\sqrt{2}\cdot v_1}{\ell}\right)^2$

$$v_1^2 = v_2^2 + \frac{1}{12}\ell^2 \cdot \sqrt{12}^2 \cdot v_1^2 \cdot \frac{1}{\ell^2} = v_2^2 + v_1^2$$

$$\Rightarrow v_2^2 = 0$$

$$\Rightarrow v_2 = 0$$

Dit betekent dat het cm na de botsing stil hangt, en de staaf er omheen draait.

(4p) / 1

(1/2) / 1

a) 2 graden van vrijheid, de ene veer kan uitrekken of de andere

b) met k_ℓ de linkerveer en k_r de rechter, y_ℓ de uitwijking omhoog van de linkerveer en y_r van de rechter:

$$T = \tfrac{1}{2} m \left(\frac{\dot y_\ell + \dot y_r}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{2} I \omega^2$$

~~$v = \omega R \Rightarrow \omega = \frac{R}{\frac{1}{2}(\dot y_\ell - \dot y_r)}$ rond het midden, $I = \frac{1}{12} m \ell^2$ rond het midden~~

~~dus $T = \frac{1}{8} m (\dot y_\ell + \dot y_r)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12} m \ell^2 \left(\frac{\ell^2}{(\dot y_\ell - \dot y_r)}\right)^2$~~

(1½) / 2

$$v = \omega \cdot R \Rightarrow \omega = \frac{v}{R} = \frac{\frac{1}{2}(\dot y_\ell - \dot y_r)}{\frac{1}{2}\ell} = \frac{\dot y_\ell - \dot y_r}{\ell}$$ rond het c m, $I = \frac{1}{12} m \ell^2$ rond het c m dus

I.

$$T = \tfrac{1}{8} \cdot m \cdot (\dot y_\ell + \dot y_r)^2 + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{12} m \ell^2 \left(\frac{\dot y_\ell - \dot y_r}{\ell}\right)^2 = \frac{m}{8} (\dot y_\ell + \dot y_r)^2 + \frac{m}{24} (\dot y_\ell - \dot y_r)^2$$

$$V = \tfrac{1}{2} k_\ell y_\ell^2 + \tfrac{1}{2} k_r y_r^2 + \cancel{mg \frac{y_\ell + y_r}{2}} = \tfrac{1}{2} k (y_\ell^2 + y_r^2) + \cancel{\frac{mg}{2}(y_\ell + y_r)}$$

Fout ..

$$L = \frac{m}{8} (\dot y_\ell + \dot y_r)^2 + \frac{m}{24} (\dot y_\ell - \dot y_r)^2 - \tfrac{1}{2} k (y_\ell^2 + y_r^2) \cancel{- \frac{mg}{2}(y_\ell + y_r)}$$

$L = T - V$ impliciet

c) $\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x}\right) = \frac{\partial L}{\partial x}}$ geeft voor y_ℓ: $\frac{d}{dt}\left[\frac{m}{4}(\dot y_\ell + \dot y_r) + \frac{m}{12}(\dot y_\ell - \dot y_r)\right] = -k y_\ell - \cancel{\frac{mg}{2}}$

$$\Rightarrow \frac{m}{4}(\ddot y_\ell + \ddot y_r) + \frac{m}{12}(\ddot y_\ell - \ddot y_r) = -k y_\ell - \cancel{\frac{mg}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{12}(4 \ddot y_\ell + 2 \ddot y_r) = -k y_\ell - \cancel{\frac{mg}{2}}$$

$$\Rightarrow m (2 \ddot y_\ell + \ddot y_r) = -6 k y_\ell \cancel{- 3mg}$$

$$\Rightarrow (2 \ddot y_\ell + \ddot y_r) + \frac{6k}{m} y_\ell = \cancel{-3g}\ 0$$

$\frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$

$\frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$

(2)

voor y_r: $\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{4}(\dot y_\ell + \dot y_r) - \frac{m}{12}(\dot y_\ell - \dot y_r)\right) = -k y_r \cancel{- \frac{mg}{2}}$

$$\Rightarrow \frac{m}{4}(\ddot y_\ell + \ddot y_r) - \frac{m}{12}(\ddot y_\ell - \ddot y_r) = -k y_r \cancel{- \frac{mg}{2}}$$

$$\Rightarrow m (\ddot y_\ell + 2 \ddot y_r) = -6 k y_r \cancel{- 3mg}$$

$$\Rightarrow (\ddot y_\ell + 2 \ddot y_r) + \frac{6k}{m} y_r = \cancel{-3g}\ 0$$

$\frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$

$\frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$

De 2 vergelijkingen aftrekken geeft:

$$2\ddot y_\ell + \ddot y_r + \frac{6k}{m} y_\ell = \cancel{-3g}\ 0 \qquad \ddot y_\ell + 2\ddot y_r + \frac{6k}{m} y_r = \cancel{-3g}\ 0$$

$$\ddot y_\ell + 2\ddot y_r + \frac{6k}{m} y_r = \cancel{-3g}\ 0 \quad - \qquad 2\ddot y_\ell + \ddot y_r + \frac{6k}{m} y_\ell = \cancel{-3g}\ 0 \quad -$$

$$(\ddot y_\ell - \ddot y_r) + \frac{6k}{m}(y_\ell - y_r) = 0 \qquad (\ddot y_r - \ddot y_\ell) + \frac{6k}{m}(y_r - y_\ell) = 0$$

(1)

eigenlijk zijn hetzelfde, alleen een factor −1 verschil. ?

~~dus $y_\ell - y_2 = A\cos(\omega t + \varphi)$ $A\cos(\sqrt{\frac{6k}{m}}\, t + \varphi)$~~

En optellen geeft $2\ddot{y}_\ell + \ddot{y}_2 + \frac{6k}{m} y_\ell = \cancel{3g}\ 0$

$$\ddot{y}_\ell + 2\ddot{y}_2 + \frac{6k}{m} y_2 = \cancel{3g}\ 0 \quad +$$

$$3(\ddot{y}_\ell + \ddot{y}_2) + \frac{6k}{m}(y_\ell + y_2) = \cancel{6g}\ 0$$

$$\Rightarrow (\ddot{y}_\ell + \ddot{y}_2) + \frac{2k}{m}(y_\ell + y_2) = \cancel{2g}\ 0 \qquad (2)$$

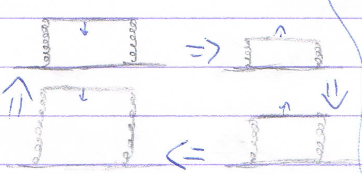
Omdat uit de eersten $y_\ell = -y_2$ volgt en uit de tweede $y_\ell = y_2$.

dus $\begin{pmatrix} y_\ell \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ · oplossing van (1) $+ C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ · oplossing van (2) ~~, waarbij de 2g in vergelijking (2) niet interessant is~~.

dus $\begin{pmatrix} y_\ell \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{6k}{m}}\, t + \varphi_1\right) + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\, t + \varphi_2\right)$, dus

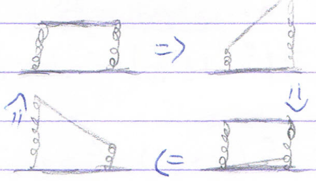
$\omega_1 = \sqrt{\frac{6k}{m}}$ en $\omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ zijn de 2 eigenfrequenties.

Trillingsvorm 2 :



$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$

Trillingsvorm 1 (in overdreven weergave, het ging alleen om kleine uitwijkingen maar nou is wel duidelijker wat ik bedoel).



$\omega = \sqrt{\frac{6k}{m}}$

(< 1/2 p) ✓

a $I_x = \frac{1}{12} m b^2$, het is als het ware een staaf die uitgerekt is in de x richting, maar dat laatste maakt voor I_x niet uit.

$I_y = \frac{1}{12} m a^2$, het is als het ware een staaf die uitgerekt is in de y richting, maar dat laatste maakt voor I_y niet uit.

1

$I_z = I_x + I_y$ (het is een pancake-object)

$= \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$

b) (2)

c) $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, hier $|\Delta L| = |\int r \times p| = |r \times \int p|$ omdat r constant is tijdens stoot

$= r \cdot \Delta p$ omdat $r \perp P$

$= r \cdot P$

$= ~~\ldots~~ \sqrt{(\frac{1}{2}a)^2 + (\frac{1}{2}b)^2} \cdot P$

$= \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2} \cdot P$

hè?

x y z

lmp?

~~Maar ook:~~

~~$L = I \cdot w = \frac{1}{12} m \begin{pmatrix} b^2 \\ a^2 \\ b^2+a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$~~

X verder

De richting is loodrecht op P en r, dus geen component in de z richting, en in de x- en y richting ~~…~~ resp. $\frac{\frac{1}{2}b}{~~\frac{1}{2}(a+b)~~}$ en $\frac{\frac{1}{2}a}{~~\frac{1}{2}(a+b)~~}$. Dus

2 / 3

$$\vec{L} = \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2} \cdot P = \frac{P\sqrt{a^2+b^2}}{2(a+b)}\begin{pmatrix} b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$$

Maar ook

$L = I \cdot w = \frac{1}{12} m \begin{pmatrix} b^2 \\ a^2 \\ b^2+a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$, ~~dus~~ die 2 samennemen geeft

$$\frac{1}{12} m b^2 w_x = \frac{P\sqrt{a^2+b^2}}{2(a+b)} \cdot b \Rightarrow w_x = 12 \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{b} \frac{P\sqrt{a^2+b^2}}{2(a+b)} = \frac{6P\sqrt{a^2+b^2}}{m\, b\,(a+b)}$$

$$\frac{1}{12} m a^2 w_y = \frac{P\sqrt{a^2+b^2}}{2(a+b)} \cdot a \Rightarrow w_y = 12 \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{a} \frac{P\sqrt{a^2+b^2}}{2(a+b)} = \frac{6P\sqrt{a^2+b^2}}{a \cdot m\,(a+b)}$$

$$\frac{1}{12} m (b^2+a^2) w_z = 0 \Rightarrow w_z = 0$$

dus $\vec{w} = \frac{6P\sqrt{a^2+b^2}}{m\,(a+b)} \cdot \begin{pmatrix} b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$. De hoeksnelheid w is dan $w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2} = \sqrt{\frac{6^2P^2(a^2+b^2)}{b^2 m^2 (a+b)^2} + \frac{6^2P^2(a^2+b^2)}{a^2 m^2 (a+b)^2}}$

$$= \sqrt{\frac{(a^2+b^2) 6^2 P^2 (a^2+b^2)}{a^2 b^2 m^2 (a+b)^2}} = \frac{(a^2+b^2)6P}{a\, b\, m\,(a+b)^2}$$

b Er moet behoud van impuls zijn ½ dus de impulstoevoeging ~~van~~ door de stoot moet behouden blijven, dus de snelheid van het cm wordt $\frac{p}{m}$ ½

m? ×

$1\frac{1}{2}$/2

1

a Onjuist, ieder object heeft altijd minstens 1 zet hoofdrichtingen. (Daarvoor staat een bewijs in het boek, maar dat ken ik niet uit mijn hoofd)

b Onjuist: als je de methode ~~voor~~ van Lagrange uitschrijft komen de genoemde wetten er juist uitrollen als ze van toepassing zijn.

c Juist. De Lagrangiaan zoals wij hem gehad hebben ($L = T - V$) heeft geen plaats voor de wrijving; wrijvingskrachten zijn niet conservatief en kennen dus ook geen duidelijke potentiaal. ~~De Lagrangiaan niet~~ En dan kloppen de Euler-Lagrangevergelijkingen dus ook niet: er komt met wrijving dan hetzelfde uit als zonder.